

Algèbre linéaire 2

4.3 Déterminant d'un endomorphisme et volumes

Réf : Grifone §4.7, 4.9-4.10

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Rappel : propriétés du déterminant

Le déterminant d'une matrice $A \in M_n(K)$ est :

(1) linéaire dans chaque colonne

$$\begin{vmatrix} \dots & a_{1j} + \lambda b_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} + \lambda b_{nj} & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & a_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{vmatrix}$$

et dans chaque ligne.

(2) **alternée** : échanger deux lignes ou deux colonnes \rightsquigarrow déterminant change de signe.

(3) calculable par pivot de Gauss :

échelonner \rightsquigarrow matrice triangulaire avec déterminant = produit des coefficients diagonaux.

(4) calculable par **développement selon ligne i** ou **colonne j** :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad \text{ou} \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}).$$

(5) **multiplicatif** : $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Cor. : A inversible \iff colonnes linéairement indépendantes $\iff \det(A) \neq 0$.

Matrices semblables

Définition

Deux matrices $A, A' \in M_n(K)$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire

Si $A, A' \in M_n(K)$ sont semblables, alors $\det(A) = \det(A')$.

Déterminant d'un endomorphisme

Proposition (Grifone Cor. 3.27)

Soit $\Phi: E \rightarrow E$ un endomorphisme et soient (e_1, \dots, e_n) , (e'_1, \dots, e'_n) deux bases de E . Alors les matrices $M(\Phi)_{e_i}$ et $M(\Phi)_{e'_i}$ sont semblables.

Déterminant d'un endomorphisme

Proposition (Grifone Cor. 3.27)

Soit $\Phi: E \rightarrow E$ un endomorphisme et soient (e_1, \dots, e_n) , (e'_1, \dots, e'_n) deux bases de E . Alors les matrices $M(\Phi)_{e_i}$ et $M(\Phi)_{e'_i}$ sont semblables.

Définition

Soit $\Phi: E \rightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Le **déterminant de Φ** est le déterminant de sa matrice dans une base (e_i) :

$$\det(\Phi) = \det(M(\Phi)_{e_i}).$$

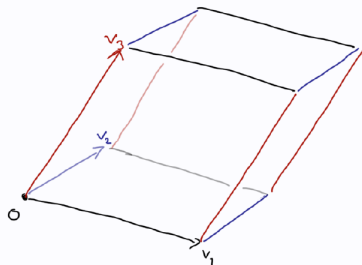
Cela ne dépend pas du choix de base.

Attention : le déterminant d'une application linéaire $\Psi: E \rightarrow F$ n'a pas de sens si $E \neq F$.

Vers une interprétation géométrique du déterminant

Le **parallélépipède** délimité par n vecteurs $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble

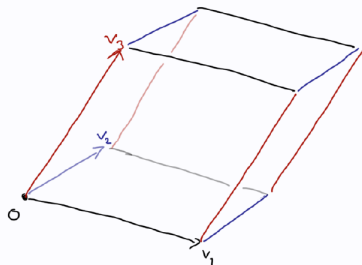
$$\{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \in \mathbb{R}^n ; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]\}.$$



Vers une interprétation géométrique du déterminant

Le **parallélépipède** délimité par n vecteurs $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble

$$\{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \in \mathbb{R}^n ; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]\}.$$



Principe : un tel parallélépipède a un certain **volume**, noté

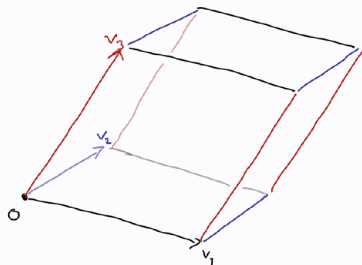
$$\text{Volume}(v_1, \dots, v_n) = \text{volume du parallélépipède délimité par } v_1, \dots, v_n.$$

(1) Dans \mathbb{R}^2 cela donne l'**aire** d'un parallélogramme et dans \mathbb{R}^3 le volume habituel.

Vers une interprétation géométrique du déterminant

Le **parallélépipède** délimité par n vecteurs $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble

$$\{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \in \mathbb{R}^n ; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]\}.$$



Principe : un tel parallélépipède a un certain **volume**, noté

$$\text{Volume}(v_1, \dots, v_n) = \text{volume du parallélépipède délimité par } v_1, \dots, v_n.$$

- (1) Dans \mathbb{R}^2 cela donne l'**aire** d'un parallélogramme et dans \mathbb{R}^3 le volume habituel.
- (2) Pour calculer un tel volume, il nous faut fixer un **unité de mesure**, c.-à-d. :
il faut spécifier combien vaut le volume du cube unité

$$\text{Volume}(e_1, \dots, e_n) = \mu \in]0, \infty[.$$

Volumes de parallélépipèdes : propriétés “naturelles”

(V1) (v_1, \dots, v_n) liée \implies parallélépipède de dimension $< n \implies \text{Volume}(v_1, \dots, v_n) = 0$.

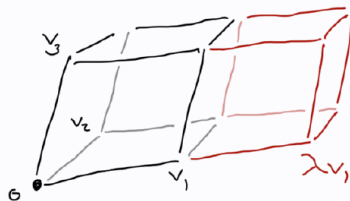
(V2) parallélépipède ne dépend pas de l'ordre des $v_1, \dots, v_n \implies \text{Volume}(v_1, \dots, v_n)$ non plus.

Volumes de parallélépipèdes : propriétés “naturelles”

(V1) (v_1, \dots, v_n) liée \implies parallélépipède de dimension $< n \implies \text{Volume}(v_1, \dots, v_n) = 0$.

(V2) parallélépipède ne dépend pas de l'ordre des $v_1, \dots, v_n \implies \text{Volume}(v_1, \dots, v_n)$ non plus.

(V3) $\text{Volume}(\lambda v_1, v_2, \dots, v_n) = |\lambda| \cdot \text{Volume}(v_1, \dots, v_n)$.

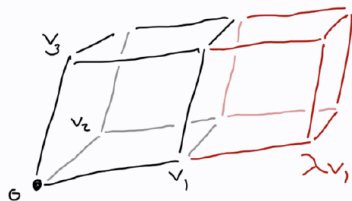


Volumes de parallélépipèdes : propriétés "naturelles"

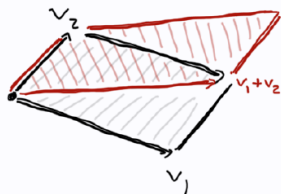
(V1) (v_1, \dots, v_n) liée \implies parallélépipède de dimension $< n \implies \text{Volume}(v_1, \dots, v_n) = 0$.

(V2) parallélépipède ne dépend pas de l'ordre des $v_1, \dots, v_n \implies \text{Volume}(v_1, \dots, v_n)$ non plus.

(V3) $\text{Volume}(\lambda v_1, v_2, \dots, v_n) = |\lambda| \cdot \text{Volume}(v_1, \dots, v_n)$.



(V4) $\text{Volume}(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n) = \text{Volume}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

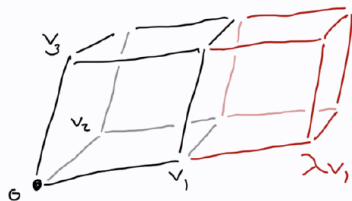


Volumes de parallélépipèdes : propriétés "naturelles"

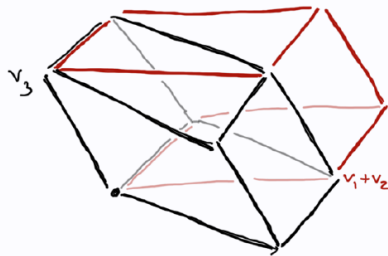
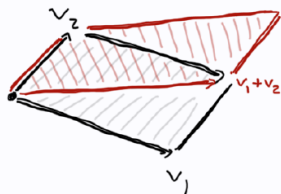
(V1) (v_1, \dots, v_n) liée \implies parallélépipède de dimension $< n \implies \text{Volume}(v_1, \dots, v_n) = 0$.

(V2) parallélépipède ne dépend pas de l'ordre des $v_1, \dots, v_n \implies \text{Volume}(v_1, \dots, v_n)$ non plus.

(V3) $\text{Volume}(\lambda v_1, v_2, \dots, v_n) = |\lambda| \cdot \text{Volume}(v_1, \dots, v_n)$.



(V4) $\text{Volume}(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n) = \text{Volume}(v_1, v_2, \dots, v_n)$



Déterminant et volume

Proposition

Soit $\mu \in]0, \infty[$. Alors il existe **au plus** une application $\text{Volume}: (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow [0, \infty[$ qui satisfait (V1) – (V4) et qui donne comme volume du cube unité

$$\text{Volume}(e_1, \dots, e_n) = \mu.$$

Déterminant et volume

Proposition

Soit $\mu \in]0, \infty[$. Alors il existe **au plus** une application $\text{Volume}: (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow [0, \infty[$ qui satisfait (V1) – (V4) et qui donne comme volume du cube unité

$$\text{Volume}(e_1, \dots, e_n) = \mu.$$

Theorème

Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, alors :

$ \det(v_1, \dots, v_n) = \text{volume du parallélépipède de dimension } n \text{ délimité par } v_1, \dots, v_n$

pour le volume normalisé afin que $\text{Volume}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Orientation (supplémentaire, voir Grifone §4.11)

Définition

Une base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n est dite

- **positivement orientée** si $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$
- **négativement orientée** si $\det(v_1, \dots, v_n) < 0$.

On peut donc voir $\det(v_1, \dots, v_n)$ comme “**volume orienté**”.

Orientation (supplémentaire, voir Grifone §4.11)

Définition

Une base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n est dite

- **positivement orientée** si $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$
- **négativement orientée** si $\det(v_1, \dots, v_n) < 0$.

On peut donc voir $\det(v_1, \dots, v_n)$ comme “**volume orienté**”.

(1) $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ positivement orientée $\iff (v_1, \dots, -v_i, \dots, v_n)$ négativement orientée.

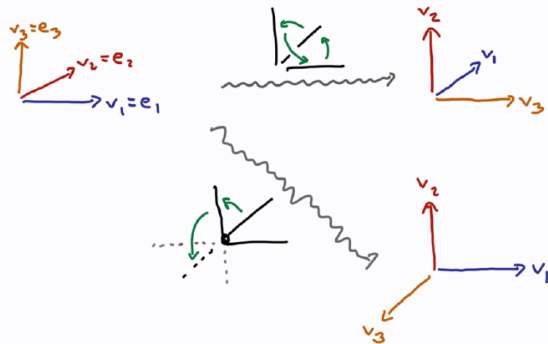
Plus général : pour une réflexion dans un hyperplan $\Phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

(v_1, \dots, v_n) et $(\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n))$ ont des orientations opposées.

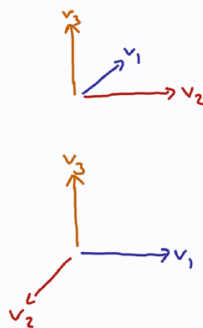
(2) Échanger deux vecteurs $v_i \leftrightarrow v_j$ de la base \implies changement d'orientation.

Orientation (supplémentaire, voir Grifone §4.11)

Orientation positive :



Orientation négative :



Proposition (Caractérisation topologique d'orientation, admis)

Deux bases (v_1, \dots, v_n) , (v'_1, \dots, v'_n) ont la même orientation $\iff \exists$ chemins continus

$$w_1: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \dots, \quad w_n: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tels que $w_i(0) = v_i$, $w_i(1) = v'_i$ et $(w_1(t), \dots, w_n(t))$ est une base pour tout $t \in [0, 1]$.